1. Funciones

1.1. Ejercicio 1

Calcular el dominio de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{3x-2}{x^2-4x+4}$
2. $g(x) = \frac{\ln(x)}{x-1}$
3. $h(x) = \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-9}}$
4. $p(x) = e^{\sqrt{2x-16}} + 2x$
5. $f(x) = \frac{1}{2}\ln(6x+13) - 2$
6. $g(x) = \sqrt[3]{x^4 - 16}$
7. $q(x) = \frac{e^{x+5}}{x^2-5}$
8. $r(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x-4}\right) + 1$
9. $g(x) = \frac{\sin(x)}{x^3-2x^2-24x}$
10. $m(x) = \sqrt{-x^2 + 10x - 9}$

Respuesta :

1. $Dom\{f(x)\} = \mathbb{R} - \{2\}$

2. $Dom\{g(x)\} = (0,1) \cup (1,+\infty)$

3. $Dom\{h(x)\} = (-\infty,-3) \cup (3,+\infty)$

4. $Dom\{p(x)\} = [8,+\infty)$

5. $Dom\{f(x)\} = \left(-\frac{13}{6},+\infty\right)$

6. $Dom\{g(x)\} = \mathbb{R}$

7. $Dom\{q(x)\} = \mathbb{R} - \left\{-\sqrt{5},\sqrt{5}\right\}$

8. $Dom\{r(x)\} = (-\infty,2) \cup (4,+\infty)$

9. $Dom\{g(x)\} = \mathbb{R} - \{-4,0,6\}$

10. $Dom\{m(x)\} = [1,9]$

1.2. Ejercicio 2

Indicar Verdadero o Falso:

1. La función $f(x) = 6x - 2$ corta al eje de las abscisas en el punto $x_0 = 6$.
2. La ordenada al origen de la función $g(x) = 4x - \frac{5}{2}$ es 4.
3. Las funciones $p(x) = 4x - \frac{1}{3}$ y $r(x) = 7x - \frac{1}{3}$ son paralelas.
4. El conjunto de positividad de $h(x) = -x - 3$ es $C^{+} = \{(-\infty, -3)\}$
5. Todas las funciones lineales de pendiente positiva cumplen $C^{+} = \{(-\infty, +\infty)\}$
6. El grafico de la función $f(x) = 6x$ es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

$$\textit{Respuesta}: \begin{cases} (1) & F \\ (2) & F \\ (3) & F \\ (4) & V \\ (5) & F \\ (6) & V \end{cases}$$

1.3. Ejercicio 3

Determinar la función lineal $f(x)$ que tiene como pendiente la raíz positiva de $g(x) = x^2 + 4x - 21$ y pasa por el punto $P = (2, 1)$. Para la función encontrada hallar el conjunto de crecimiento y el conjunto de positividad.

$$\textit{Respuesta}: \begin{cases} f(x) = 3x - 5 \\ C^{\uparrow} = \{(-\infty, +\infty)\} \\ C^{+} = \left\{\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)\right\} \end{cases}$$

1.4. Ejercicio 4

Encontrar una función lineal $h(x)$ que sea paralela a la recta $y = -4x + 5$ y pase por el punto de intersección de las funciones $f(x) = x^2 - 3x - 1$ y $g(x) = -7x - 5$.

$\textit{Respuesta}: h(x) = -4x + 1$

1.5. Ejercicio 5

Dada $f(x) = (a-b)x + b^3$, hallar $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 8$ y la función corte al eje de las abscisas en $x_0 = -4$. Para los valores de a y b obtenidos hallar el conjunto de negatividad y de decrecimiento de $f(x)$.

$$\textit{Respuesta}: \begin{cases} a = 4 \\ b = 2 \\ C^- = \{(-\infty, -4)\} \\ C^{\downarrow} = \emptyset \end{cases}$$

1.6. Ejercicio 6

Sean las funciones $g(x) = 7x - 5$, y $f(x) = -8x - 4$, hallar la función lineal $m(x)$ que pasa por los puntos $g(1)$ y $f(-1)$.

Respuesta : $m(x) = -x + 3$

1.7. Ejercicio 7

Indicar Verdadero o Falso:

1. La imagen de la función $h(x) = 3x^2 - 12x + 16$ es $(4, +\infty)$
2. Todas las funciones cuadráticas cortan al eje x en dos puntos.
3. El conjunto de negatividad de $f(x) = x^2+5x+6$ es el intervalo$(-3, -2)$
4. Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$. Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces la función corta al eje y en un número positivo.
5. La parábola $y = -\frac{4}{3}x + \frac{5}{2}x^2 + 2$ es cóncava positiva.
6. La función cuadrática $s(x) = x^2 + x + 1$ no tiene ceros.

$$\textit{Respuesta}: \begin{cases} (1) & F \\ (2) & F \\ (3) & V \\ (4) & F \\ (5) & V \\ (6) & V \end{cases}$$

1.8. Ejercicio 8

Encontrar la función lineal $r(x)$ que pasa por el vértice de la parábola $y = 5x^2 - 40x + 86$ y por la raíz de la función $g\, o\, h(x)$ siendo $h(x) = \frac{4}{7}x + 1$ y $g(x) = 7x - 15$. Encontrar el conjunto de ceros de $r(x)$.

$$Respuesta: \begin{cases} h(x) = 3x - 6 \\ C_0 = \{2\} \end{cases}$$

1.9. Ejercicio 9

Dada $g(x) = -x^2 - 2x + a$, hallar $a \in \mathbb{R}$ sabiendo que $Im\{g(x)\} = (-\infty, -6]$ y $C^{\uparrow} = \{(-\infty, -1)\}$. Encontrar el conjunto de ceros de $g(x)$. ¿Es posible encontrar el C_0 sin obtener previamente el valor de a?

$$Respuesta: \begin{cases} a = -7 \\ C_0 = \emptyset \\ Sí \end{cases}$$

1.10. Ejercicio 10

Se tienen las funciones $f(x) = 3x^2 + \alpha x + 4$ y $g(x) = 2x^2 + 3$. ¿Qué valores debe tomar $\alpha \in \mathbb{R}$ para que las funciones no compartan ningún punto del plano?

$$Respuesta: \alpha \in (-2, 2)$$

1.11. Ejercicio 11

Hallar la forma polinómica y factorizada de la función $h(x)$ que tiene las mismas raíces que $p(x) = 5x^2 - 10x - 15$ y pasa por el vértice de la función $r(x) = -2(x-7)^2 - 64$.

$$Respuesta: \begin{cases} h(x) = -2x^2 + 4x + 6 \\ h(x) = -2(x+1)(x-3) \end{cases}$$

1.12. Ejercicio 12

Hallar los puntos de intersección entre $f(x) = \alpha x^2 - x + 4$ y $g(x) = 5x^2 + \beta x + 2$, sabiendo que el $C^{\uparrow}$ de $f(x)$ es $\left(\frac{1}{12}, +\infty\right)$ y que el gráfico de $g(x)$ es simétrico con respecto a la recta $x = -\frac{1}{5}$.

$$\textit{Respuesta}: \begin{cases} P.I_1 = (1,9) \\ P.I_2 = (2,26) \end{cases}$$

1.13. Ejercicio 13

De una función cuadrática $q(x)$ se sabe el $C_0 = \{-3,-1\}$ y la $Im\{q(x)\} = (-\infty, 9]$. Encontrar la función $q(x)$ y escribirla en forma polinómica y canónica.

$$\textit{Respuesta}: \begin{cases} q(x) = -9x^2 - 36x - 27 \\ q(x) = -9(x+2)^2 + 9 \end{cases}$$

1.14. Ejercicio 14

Hallar la imagen y los conjuntos de positividad y negatividad de la función $f(x) = -x^2 + \lambda x - 7$ sabiendo que $g(x) = 2x - 4$ y $g\, o\, f(4) = 14$.

$$\textit{Respuesta}: \begin{cases} Im\{f(x)\} = (-\infty, 9] \\ C^+ = \{(1,7)\} \\ C^- = \{(-\infty,1) \cup (7,+\infty)\} \end{cases}$$

1.15. Ejercicio 15

Sea la función $h(x) = \frac{1}{2}x + 3$, encontrar la función cuadrática $g(x)$ y escribirla en forma canónica sabiendo que toma su valor máximo en $x = 4$, $f(4) = h(8)$ y su coeficiente principal es $h(-12)$. Para la función hallada determinar analíticamente el conjunto de positividad.

$$\textit{Respuesta}: \begin{cases} g(x) = -3(x-4)^2 + 7 \\ C^+ = \left\{\left(\frac{-24+\sqrt{84}}{-6}, \frac{-24-\sqrt{84}}{-6}\right)\right\} \end{cases}$$

1.16. Ejercicio 16

Indicar Verdadero o Falso

1. Una función polinómica de grado 3 tiene exactamente 3 raíces.

2. Una función polinómica siempre tiene raíces reales.

3. Si dos funciones polinómicas tienen el mismo conjunto de ceros entonces tienen el mismo conjunto de positividad y de negatividad.

4. El conjunto de ceros de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x$ es $\{-2, 0, 4\}$

5. El conjunto de positividad de la función $g(x) = (x-1)^2 (x-6)$ es $(6, +\infty)$

6. Las funciones polinómicas no tienen asíntotas.

$$\textit{Respuesta}: \begin{cases} (1) & F \\ (2) & F \\ (3) & F \\ (4) & V \\ (5) & V \\ (6) & V \end{cases}$$

1.17. Ejercicio 17

Dada $g(x) = -3x^4 + 2x^5 + 6x^2 - 11x^3$, hallar el conjunto de ceros y el conjunto de negatividad sabiendo que la función pasa por el punto $P = (3, 0)$.

$$\textit{Respuesta}: \begin{cases} C_0 = \left\{-2, 0, \frac{1}{2}, 3\right\} \\ C^- = \left\{(-\infty, -2) \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right)\right\} \end{cases}$$

1.18. Ejercicio 18

Dada $f(x) = x^4 + (a+b)x^3 - ax^2$, hallar $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $f(1) = 0$ y $f(4) = 288$. Para los valores de a y b encontrados determinar los puntos del gráfico de $f(x)$ que tienen ordenada igual a cero.

$$\text{Respuesta}: \begin{cases} a = 2, \\ b = -1 \\ P_1 = (-2, 0) \\ P_2 = (0, 0) \\ P_3 = (1, 0) \end{cases}$$

1.19. Ejercicio 19

Sea $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 16)$, determinar los puntos donde el gráfico de la función corta al eje de las abscisas y los conjuntos de positividad y negatividad.

$$\text{Respuesta}: \begin{cases} C_0 = \{-1, 1\} \\ C^+ = \{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\} \\ C^- = \{(-1, 1)\} \end{cases}$$

1.20. Ejercicio 20

1. Las funciones homográficas siempre tienen asíntota vertical y asíntota horizontal.
2. El conjunto de ceros de las funciones homográficas es vacío.
3. La gráfica de una función homográfica creciente se encuentra en el primer y en el tercer cuadrante.
4. La función $f(x) = \frac{2x-2}{x+5}$ tiene asíntota vertical en $x = 2$ y asíntota horizontal en $y = -5$.
5. Sea $g(x) = \frac{3x-3}{x+4}$, su conjunto de positividad es $(-\infty, -4) \cup (1, +\infty)$
6. La función $h(x) = \frac{1-x}{x+8}$ decrece solamente en el intervalo $(-8, +\infty)$

$$\text{Respuesta}: \begin{cases} (1) & V \\ (2) & F \\ (3) & F \\ (4) & F \\ (5) & V \\ (6) & F \end{cases}$$

1.21. Ejercicio 21

Dada la función $f(x) = \frac{9+6\beta x}{\alpha x-6}$, encontrar los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si se sabe que el $Dom\{f(x)\} = \mathbb{R} - \{3\}$ y la función tiene asíntota horizontal en $y = 3$. Para los valores de α y β hallados, encontrar $f^{-1}(x)$ y su asíntota vertical.

$$\textcolor{blue}{Respuesta:} \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \\ f^{-1}(x) = \frac{6x+9}{2x-6} \\ A.V : \ x = 3 \end{cases}$$

1.22. Ejercicio 22

Sean las funciones $f(x) = \frac{x-5}{2x+4}$y $g(x) = 6x$, calcular la imagen, el conjunto de ceros y la asíntota horizontal de $h(x) = g\,o\,f(x)$.

$$\textcolor{blue}{Respuesta:} \begin{cases} Im\{h(x)\} = \mathbb{R} - \{3\} \\ C_0 = \{5\} \\ A.H : \ y = 3 \end{cases}$$

1.23. Ejercicio 23

Dadas las funciones $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = \frac{2x+1}{x}$ y $h(x) = x - 3$, encontrar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $[h\,o\,(g\,o\,f)](x)$.

$$\textcolor{blue}{Respuesta:} \begin{cases} C^{\uparrow} = \emptyset \\ C^{\downarrow} = \left\{\left(-\infty, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)\right\} \end{cases}$$

1.24. Ejercicio 24

Indicar Verdadero o Falso:

1. La función $f(x) = \ln(3x - 9)$ no tiene ceros.
2. El dominio de $g(x) = e^{\sqrt{x-2}}$ es $(2, +\infty)$
3. Las funciones $m(x) = \ln(x - 1)$ y $n(x) = e^x + 1$ tienen asíntota vertical en $x = 1$.
4. La imagen de una función exponencial $f(x)$ coincide con el dominio de $f^{-1}(x)$.

5. Las funciones logarítmicas siempre tienen asíntotas verticales.

6. El conjunto de positividad de $f(x) = e^x - 1$ es el intervalo $(0, +\infty)$.

$$\textit{Respuesta}: \begin{cases} (1) & F \\ (2) & F \\ (3) & F \\ (4) & V \\ (5) & F \\ (6) & V \end{cases}$$

1.25. Ejercicio 25

Sea $g(x) = e^{x-4} + 2$. Calcular el dominio, la imágen y el conjunto de positividad de $g^{-1}(x)$.

$$\textit{Respuesta}: \begin{cases} Dom\left\{g^{-1}(x)\right\} = (2, +\infty) \\ Im\left\{g^{-1}(x)\right\} = \mathbb{R} \\ C^{+} = \left\{(e^{-4} + 2, +\infty)\right\} \end{cases}$$

1.26. Ejercicio 26

Encontrar el dominio y el conjunto de ceros de la función $f(x) = \ln(x^2 - 16)$.

$$\textit{Respuesta}: \begin{cases} Dom\left\{f(x)\right\} = (-\infty, -4) \cup (4, +\infty) \\ C_0 = \left\{-\sqrt{17}, \sqrt{17}\right\} \end{cases}$$

1.27. Ejercicio 27

Sean las funciones $f(x) = e^x - 6$ y $g(x) = 5x^2 - 3x$, hallar el dominio de $f^{-1} \, o \, g(x)$.

$$\textit{Respuesta}: Dom\left\{f(x)\right\} = \mathbb{R}$$

1.28. Ejercicio 28

Indicar Verdadero o Falso:

1. El conjunto imagen de las funciones trigonométricas es un conjunto acotado.
2. Una función trigonométrica puede tener infinitos cortes por el eje x.
3. Las funciones trigonométricas no son periódicas.
4. El dominio de la función $f(x) = 3\cos(x) - 1$ es $(0, +\infty)$
5. La imagen de la función $h(x) = 4\sin(x) + 5$ es $[1, 9]$
6. Las funciones trigonométricas pueden tener asíntotas verticales.

$$Respuesta: \begin{cases} (1) & V \\ (2) & V \\ (3) & F \\ (4) & F \\ (5) & V \\ (6) & F \end{cases}$$

1.29. Ejercicio 29

Hallar el dominio de la función $f(x) = \frac{3x}{\sin(x)-1}$. ¿Cómo se modificaria el dominio si $x \in [-\pi, \pi]$?

$$Respuesta: \begin{cases} Dom\left\{f(x)\right\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} \quad k = \pm1, \pm2, \pm3\ldots \\ Dom\left\{f(x)\right\} = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2}\right\} \end{cases}$$

1.30. Ejercicio 30

Determinar el conjunto de ceros , la amplitud y el período de la función $h(x) = f\,o\,g(x)$, siendo $f(x) = 3x$ y $g(x) = \cos(x) - 1$.

$$Respuesta: \begin{cases} C_0 = \{2k\pi\} \quad k = \pm1, \pm2, \pm3\ldots \\ A = \\ T = \end{cases}$$

1.31. Ejercicio 31

Hallar las soluciones de $2\cos^2(x) + 3\cos(x) = 2$.

$$Respuesta: \begin{cases} x_1 = & \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x_2 = & \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, \; k = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$$

1.32. Ejercicio 32

Sea la función $f(x) = 2\sin(x + \pi) + b$ definida en el intervalo $[-2\pi, 2\pi]$, hallar el valor de $b \in \mathbb{R}$ para el cual $Im\{g(x)\} = [0, 4]$. Para el valor de b encontrado escribir los intervalos de positividad y negatividad de $g(x)$.

$$Respuesta: \begin{cases} b = 2 \\ C^+ = \left\{[-2\pi, -\frac{3\pi}{2}) \cup \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup (\frac{\pi}{2}, 2\pi]\right\} \\ C^- = \varnothing \end{cases}$$