1. Estudio de Funciones

1.1. Ejercicio 1

Estudiar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los máximos y los mínimos relativos de las siguientes funciones:

1. $f(x) = -x^2 + 8x - 15$
2. $a(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$
3. $g(x) = 10x^3 - 6x^5$
4. $h(x) = 4x - 1$
5. $i(x) = xe^x$
6. $\alpha(x) = x^4 e^{4x+5}$
7. $v(x) = e^{x+1}(2x^2 - 4x) - 14$
8. $r(x) = x\ln(x)$

Respuesta :

1. $\begin{cases} C^{\uparrow} = \{(-\infty, 4)\} \\ C^{\downarrow} = \{(4, +\infty)\} \\ P_{MÁX} = (4, 1) \end{cases}$

2. $\begin{cases} C^{\uparrow} = \{(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)\} \\ C^{\downarrow} = \{(1, 2)\} \\ P_{MÁX} = (1, 0) \\ P_{MÍN} = (2, 1) \end{cases}$

3. $\begin{cases} C^{\uparrow} = \{(-1, 0) \cup (0, 1)\} \\ C^{\downarrow} = \{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\} \\ P_{MÁX} = (-1, -4) \\ P_{MÍN} = (1, 4) \end{cases}$

4. $\begin{cases} C^{\uparrow} = \{(-\infty, +\infty)\} \\ C^{\downarrow} = \emptyset \end{cases}$

5. $\begin{cases} C^{\uparrow} = \{(-1, +\infty)\} \\ C^{\downarrow} = \{(-\infty, -1)\} \\ P_{MÍN} = \left(-1, -\frac{1}{e}\right) \end{cases}$

6. $\begin{cases} C^{\uparrow} = \{(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)\} \\ C^{\downarrow}{=}\{(-1,0)\} \\ P_{MÁX} = (-1,e) \\ P_{MÍN} = (0,1) \end{cases}$

7. $\begin{cases} C^{\uparrow} = \{(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)\} \\ C^{\downarrow}{=}\{(-3,3)\} \\ P_{MÁX} = \left(-3,\frac{26}{e^2}\right) \\ P_{MÍN} = \left(3,\frac{2}{e^4}\right) \end{cases}$

8. $\begin{cases} C^{\uparrow} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)\right\} \\ C^{\downarrow} = \left\{\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\right\} \\ P_{MÍN} = \left(\frac{1}{\sqrt{e}},-\frac{1}{2\sqrt{e}}\right) \end{cases}$

1.2. Ejercicio 2

Hallar el dominio, las asíntotas verticales y horizontales, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos locales de las siguientes funciones:

1. $h(x) = \frac{x^2}{x-3}$
2. $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$
3. $p(x) = \frac{2x-1}{x-5}$
4. $f(x) = \frac{x^2}{x-4}$
5. $r(x) = \frac{x-5}{x^2-16}$
6. $i(x) = 2 + \frac{x}{2x^2+1}$
7. $k(x) = \frac{x^2-6x+13}{x-3}$
8. $n(x) = \frac{x^3}{x+1}$

Respuesta :

1. $\begin{cases} Dom\{h(x)\} = \mathbb{R}-\{3\} \\ A.V:\ x=3 \\ C^{\uparrow} = \{(-\infty,0)\cup(6,+\infty)\} \\ C^{\downarrow} = \{(0,3)\cup(3,6)\} \\ P_{MÁX} = (0,0) \\ P_{MÍN} = (6,12) \end{cases}$

2. $\begin{cases} Dom\left\{g\left(x\right)\right\}=\mathbb{R} \\ A.H:\ y=0 \\ C^{\uparrow}=\left\{(-1,1)\right\} \\ C^{\downarrow}=\left\{(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\right\} \\ P_{M\acute{A}X}=\left(1,\frac{1}{2}\right) \\ P_{M\acute{I}N}=\left(-1,-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

3. $\begin{cases} Dom\left\{p\left(x\right)\right\}=\mathbb{R}-\left\{5\right\} \\ A.V:\ x=5 \\ A.H:\ y=2 \\ C^{\downarrow}=\left\{(-\infty,5)\cup(5,+\infty)\right\} \end{cases}$

4. $\begin{cases} Dom\left\{f\left(x\right)\right\}=\mathbb{R}-\left\{4\right\} \\ A.V:\ x=4 \\ C^{\uparrow}=\left\{(-\infty,0)\cup(8,+\infty)\right\} \\ C^{\downarrow}=\left\{(0,4)\cup(4,8)\right\} \\ P_{M\acute{A}X}=(0,0) \\ P_{M\acute{I}N}=(8,16) \end{cases}$

5. $\begin{cases} Dom\left\{r\left(x\right)\right\}=\mathbb{R}-\left\{-4,4\right\} \\ A.V:\ x=-4,\ x=4 \\ A.H:\ y=0 \\ C^{\uparrow}=\left\{(2,4)\cup(4,8)\right\} \\ C^{\downarrow}=\left\{(-\infty,4)\cup(-4,2)\cup(8,+\infty)\right\} \\ P_{M\acute{A}X}=\left(8,\frac{1}{16}\right) \\ P_{M\acute{I}N}=\left(2,\frac{1}{4}\right) \end{cases}$

6. $\begin{cases} Dom\left\{i\left(x\right)\right\}=\mathbb{R} \\ A.H:\ y=2 \\ C^{\uparrow}=\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} \\ C^{\downarrow}=\left\{\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)\right\} \\ P_{M\acute{A}X}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{8+\sqrt{2}}{4}\right) \\ P_{M\acute{I}N}=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{8-\sqrt{2}}{4}\right) \end{cases}$

7. $\begin{cases} Dom\left\{k\left(x\right)\right\} = \mathbb{R} - \{3\} \\ A.V:\ x = 3 \\ C^{\uparrow} = \{(-\infty, 1) \cup (5, +\infty)\} \\ C^{\downarrow} = \{(1, 3) \cup (3, 5)\} \\ P_{M\acute{A}X} = (1, -4) \\ P_{M\acute{I}N} = (5, 4) \end{cases}$

8. $\begin{cases} Dom\left\{n\left(x\right)\right\} = \mathbb{R} - \{-1\} \\ A.V:\ x = -1 \\ C^{\uparrow} = \left\{\left(-\frac{3}{2}, 1\right) \cup (-1, 0) \cup\right\} (0, +\infty) \\ C^{\downarrow} = \left\{\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)\right\} \\ P_{M\acute{I}N} = \left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right) \end{cases}$

1.3. Ejercicio 3

Sea $f\left(x\right) = e^{x^3 - kx}$. Determinar el valor de $k \in \mathbb{R}$ para que la función tenga un extremo relativo en $x = 2$. Para el valor de k hallado determinar los máximos y los mínimos relativos de $f\left(x\right)$.

$$Respuesta: \begin{cases} k = 12 \\ P_{M\acute{A}X} = (-2, e^{16}) \\ P_{M\acute{I}N} = (2, e^{-16}) \end{cases}$$

1.4. Ejercicio 4

Sea $h\left(x\right) = x - \frac{a}{x}$. Determinar el valor de $a \in \mathbb{R}$ de modo que $h\left(x\right)$ tenga un máximo relativo en $x = -1$. Para el valor de a encontrado, hallar las asintotas verticales y horizontales, los intervalos de crecimiento y de decrecimiento y todos los extremos locales.

$$Respuesta: \begin{cases} a = -1 \\ A.V:\ x = 0 \\ C^{\uparrow} = \{(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)\} \\ C^{\downarrow} = \{(-1, 0) \cup (0, 1)\} \\ P_{M\acute{A}X} = (-1, -2) \\ P_{M\acute{I}N} = (1, 2) \end{cases}$$

1.5. Ejercicio 5

Encontrar la función cuadrática $\alpha(x)$ que pasa por el punto $Q = (-2, 1)$, tiene un extremo relativo en $x = 3$ y pasa por el origen de coordenadas. Para la función hallada escribir los conjuntos de crecimiento y de decrecimiento.

Respuesta : $\begin{cases} \alpha(x) = \frac{1}{8}x^2 - \frac{3}{8}x \\ C^{\uparrow} = \{(3, +\infty)\} \\ C^{\downarrow} = \{(-\infty, 3)\} \end{cases}$

1.6. Ejercicio 6

¿Cuál es el punto de la recta $y = -2x + 5$ que está más cerca del origen de coordenadas?

Respuesta : $A = (2, 1)$

1.7. Ejercicio 7

Hallar dos números x, y tales que su suma sea igual a 12 y la suma de sus cuadrados sea mínima.

Respuesta : $\begin{cases} x = 6 \\ y = 6 \end{cases}$

1.8. Ejercicio 8

Se sabe que la temperatura (en ºC) t horas después de suministrar cierto antibiótico a una persona se rige según la ley $T(t) = 37 + \frac{1}{4}e^{\frac{-(t-3)^2}{2}}$. ¿En qué instante se alcanza la temperatura máxima?

Respuesta : $t = 3$